



TITLE:

# 熱対流の安定性 (連続体力学における非線型方程式の近似解法)

AUTHOR(S):

水島, 二郎; 後藤, 金英

---

CITATION:

水島, 二郎 ...[et al]. 熱対流の安定性 (連続体力学における非線型方程式の近似解法). 数理解析研究所講究録 1975, 244: 47-60

ISSUE DATE:

1975-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105616>

RIGHT:

## 熱対流の安定性

京大 理・物 水島二郎  
京大 数理研 後藤金英

## §1. 問題の説明

図1のように、二枚の無限平板が重力場の中に鉛直平行に置かれ、間に流体が満たされている。二枚の平板に温度差を与えると、流体に自然対流が発生する。この自然対流の安定性を調べるのがこの問題である。

理論では常に平板は無限大として取り扱うが、現実の流れ、特に実験の場合には無限平板はあり得ない。Elder(1965)は深さが有限であることの影響は系全体に鉛直方向の温度勾配が生ずることに特徴的に現われることを示した。理論においても平板の深さが有限であることの影響を取り入れなければならない。ここでは、問題を次のように拡張することにより、

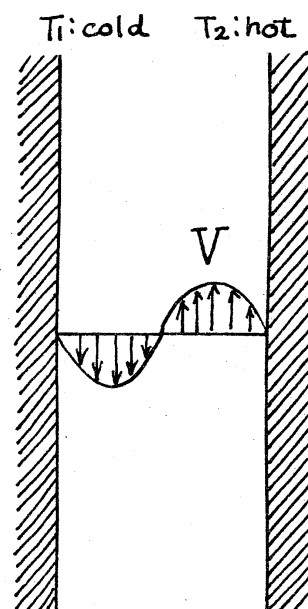


図 1

流体の深さが有限であることの影響を取り入れる。図2のように、温度差がある二枚の無限平板が重力場の中に鉛直平行に置かれ、その間に流体が満たされており、系全体に  $\beta^*$  の温度勾配がある。このとき流体中に発生する自然対流の安定性を調べる。このように問題を拡張すると、流体中に発生する自然対流の速度分布及び温度分布はともに有限深さの流体で行なった実験とよく一致する。[Elder(1965)].

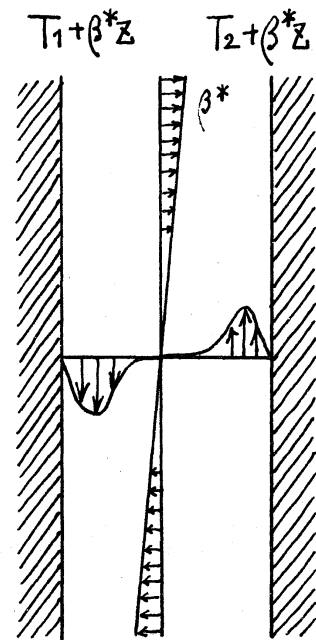


図 2

平板間の間隔を  $2L$ 、温度差を  $2\Delta T$ 、動粘性係数を  $\nu$ 、流体の体膨張率を  $\gamma$ 、熱伝達率を  $k$ 、重力加速度を  $g$ 、鉛直方向の温度勾配を  $\beta^*$  とする。座標系は図3のように鉛直方向に  $z$  軸、平板に垂直に  $x$  軸、 $z$  軸に垂直に  $y$  軸をとる。温度勾配  $\beta^*$  を無次元化し、 $\beta$  で表わす。  $\beta = \beta^* \frac{L}{\Delta T}$  である。

この問題の無次元パラメータは次の3つである。

$$Gr = \frac{g \Delta T L^3}{\nu^2}$$

: Grashof 数

$$Ra = \frac{g \Delta T L^3}{\nu \alpha}$$

: Rayleigh 数

$$4m^4 = \beta Ra$$

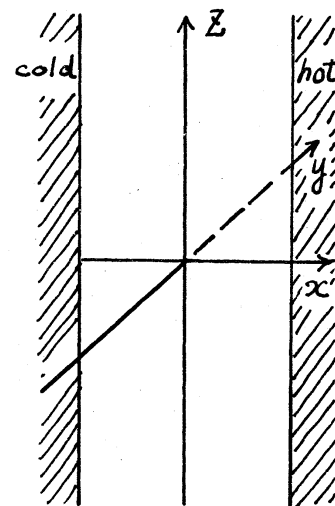


図 3

ここでの  $\rho$  は Prandtl 数で  $\rho = \nu/k$  であり物質により決まる定数である。(空気  $\rho = 0.71$ 、水  $\rho = 7.5$ 、silicon oil  $\rho = 900$ )。 $2\Delta T$  の温度差で駆動される速さの目安は  $W_0 = \rho g \Delta T L^2 / \nu$  で  $G$  はこれから構成される Reynolds 数と考えてもよい。 $m$  は温度勾配の大きさを示すパラメータである。

### 1.1 実験

Vest & Arpaci (1969) は  $m = 1.1$  のとき  $G_c \approx 543$  で自然対流が不安定となり、cell pattern をもつ別の対流へ移ることを示した。(  $\rho = 0.71$  air )。不安定のおこる前の自然対流を 1 次対流、不安定になり、起こった cell pattern をもつ対流を 2 次対流とよぶことにする。Oshima (1971) は水 ( $\rho = 6.7$ ) を用いて実験を行ない、 $m = 5.9$  のとき、 $G_c = 2.2 \times 10^4$  で伝播波攪乱に対して不安定になることを示した。

### 1.2 問題の意味

$m = 0$  あるいは  $m$  が小さいとき一次対流は対流型の攪乱に対して不安定で、二次対流へと遷移し、cell pattern を形成する。(図 4)。

$m$  が大きくなると一次対流は伝播波型の攪乱に対して不安定となり、乱流へと遷移する。以上のことからある  $m$  の値のところで一次対流は対流型不安定から伝播

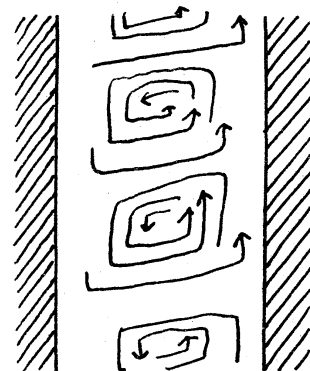


図 4

波型不安定へと移行することが予想される。この移行する点を捜すことがこの問題の目的の一つである。最近、物性論で熱対流が相転移と比較して論じられているが、この移行する点は相転移の三重点を思い起させる。(図5)。

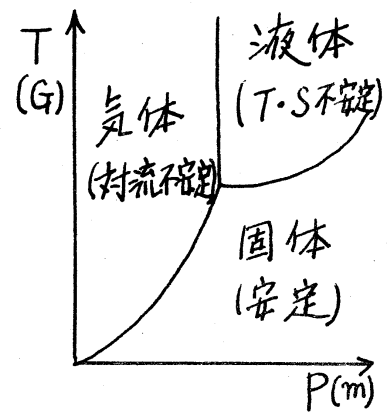


図 5

また、この一次対流の不安定のメカニズムを明らかにすることもこの問題の目的の一つである。

## § 2. 問題の定式化

無次元量を用いて運動方程式・連続の式・熱伝導方程式は次のように書ける。ただし運動方程式では Boussinesq 近似を用いることにする。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = -\nabla p + (\rho G)^{-1} (1 + \rho) g + G^{-1} \nabla^2 u \quad (2.1)$$

$$\nabla u = 0 \quad (2.2)$$

$$p = -\rho T \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (u \cdot \nabla) T = (\sigma G)^{-1} \nabla^2 T \quad (2.4)$$

境界条件は  $u(x, y, z)$ ,  $T(x, y, z)$  に対して、

$$u(\pm 1, y, z) = 0 \quad (2.5)$$

$$T(\pm 1, y, z) = \pm 1 + \beta z \quad (2.6)$$

定常解を  $u=[0, 0, W(x)]$ ,  $T=\Theta(x)+\beta z+T_0$  と仮定すると次のように求められる。

$$W_s(x) = -0.5 m^{-2} \operatorname{Im}[f(x, m)]. \quad (2.7)$$

$$\Theta_s(x) = \operatorname{Re}[f(x, m)]. \quad (2.8)$$

$$P_s(x) = (pG)^{-1} (0.5 \beta \beta z^2 - z) + \text{const.} \quad (2.9)$$

ここで

$$f(x, m) = \sinh[(1+i)m\pi] / \sinh[(1+i)m]. \quad (2.10)$$

である。  $m=0$  のとき定常解 (2.7), (2.8) は次のようになる。

$$W_s(x) = \frac{1}{6} x(1-x^2). \quad (2.11)$$

$$\Theta_s(x) = x. \quad (2.12)$$

$m \rightarrow \infty$  では  $x=1$  の近くで,  $\xi = m(1-x)$  を用いて

$$W_s(\xi) = 0.5 m^{-2} e^{-\xi} \sin \xi, \quad (2.13)$$

$$\Theta_s(\xi) = e^{-\xi} \cos \xi, \quad (2.14)$$

となる。

この定常解に攪乱  $\hat{u}, \hat{t}, \hat{p}$  を加え、そのフーリエ成分を考える。

$$[\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{t}, \hat{p}] = [\phi(x), \psi(x), \chi(x), \theta(x), p(x)]$$

$$\times \exp[i\alpha(z-ct) + i\lambda y], \quad (2.15)$$

$\alpha, \lambda$  は波数,  $c$  は複素伝播速度である。2次元攪乱だけを考え、 $\lambda=0$  とおく。  $\psi, \chi, p$  を攪乱の方程式から消去する

と、 $\phi$ 、 $\theta$  に関する次の方程式系が得られる。

$$\begin{aligned} (W_s - c)(D^2 - \alpha^2)\phi - (D^2 W_s)\phi \\ = (i\alpha G)^{-1} \{ (D^2 - \alpha^2)^2 \phi - D\theta \}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} (W_s - c)\theta + (D\Theta_s)\phi \\ = (i\alpha G)^{-1} \{ (D^2 - \alpha^2)\theta + 4m^4 D\phi \}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

境界条件は

$$\phi(\pm 1) = D\phi(\pm 1) = \theta(\pm 1) = 0. \quad (2.18)$$

$m \rightarrow \infty$  の漸近的な性質は次の変換を行なうと明らかになる。変換  $\tilde{\theta} = \theta/m^3$ ,  $\tilde{c} = 2m^2 c$ ,  $\tilde{\alpha} = \alpha/m$ ,  $\tilde{G} = G/2m^3$  を行なうと、方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} (\tilde{W}_s - \tilde{c}) \left( \frac{d^2}{d\xi^2} - \tilde{\alpha}^2 \right) \phi - \left( \frac{d^2 \tilde{W}_s}{d\xi^2} \right) \phi \\ = (i\tilde{\alpha} \tilde{G})^{-1} \left\{ \left( \frac{d^2}{d\xi^2} - \tilde{\alpha}^2 \right)^2 \phi - \frac{d\tilde{\theta}}{d\xi} \right\}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{W}_s - \tilde{c}) \tilde{\theta} + \left( \frac{d\tilde{\Theta}_s}{d\xi} \right) \phi \\ = (i\tilde{\alpha} \tilde{G})^{-1} \left\{ \left( \frac{d^2}{d\xi^2} - \tilde{\alpha}^2 \right) \tilde{\theta} + 4 \frac{d\phi}{d\xi} \right\}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

ここで

$$\tilde{W}_s = e^{-\xi} \sin \xi \quad (2.21)$$

$$\tilde{\Theta}_s = 2e^{-\xi} \cos \xi \quad (2.22)$$

境界条件は次のようになる。

$$\phi(0) = \phi(\infty) = \frac{d\phi(0)}{d\xi} = \frac{d\phi(\infty)}{d\xi} = \hat{\theta}(0) = \hat{\theta}(\infty) = 0. \quad (2.23)$$

(2.19), (2.20), (2.23) には  $\rho$  は含まれているが,  $m$  は含まれていないので, これから決まる  $\tilde{G}$  の固有値は  $\rho$  だけの関数  $\tilde{G}_c(\rho)$  である。このことから  $m \rightarrow \infty$  で  $G_c$  は次の性質を持つことがわかる。

$$G_c(m, \rho) = 2m^3 \tilde{G}_c(\rho) \quad \text{as } m \rightarrow \infty \quad (2.24)$$

§ 3. これまでに得られている結果 (水  $\rho=7.5$  の場合)

### 3.1 対流型攪乱に対する不安定性

a.  $m=0$  の場合

Rudakov (1967) Galerkin 法

Vest & Arpaci (1969) Galerkin 法

Gotoh & Ikeda (1972) Runge-Kutta-Gill 法

Gotoh & Mizushima (1973) Runge-Kutta-Gill 法

$G_c \doteq 500$ .

b.  $m \neq 0$  の場合

Gotoh & Mizushima (1973)

$G_c \doteq 500. \quad m \leq 1.$

$G_c = 230m^3 \quad m \geq 1.5$  (図 9 を参照)



## 3.2 伝播波型攪乱に対する不安定性

a.  $m=0$  の場合

Gotoh & Satoh (1966) 漸近解析 ( $(\alpha R)^{-\frac{1}{3}}$  展開,  $C=0$  からの展開)  
 と  $\alpha^2$  展開

$$Gr_c = 5 \times 10^6$$

Gotoh & Ikeda (1971) 漸近解析 ( $(\alpha R)^{-\frac{1}{3}}$  展開,  $C=0$  からの展開)  
 と Runge-Kutta-Gill 法併用  
 (非定常 2 次元対流の解析)

$$Gr_c = 3 \times 10^7$$

Rudakov (1967) Galerkin 法

計算された範囲の  $Gr$  の値に対しては  $Gr_c$  得られず.

Mizushima

漸近解析 ( $(\alpha R)^{-\frac{1}{3}}$  展開,  $C=0$  からの展開)  
 と Runge-Kutta-Gill 法併用

$$Gr_c = 3 \times 10^7$$

b.  $m \neq 0$  の場合

Mizushima

漸近解析と Runge-Kutta-Gill 法併用

$Gr_c$  は図 9 を参照.

c.  $m \rightarrow \infty$  の場合

Nachtsheim (1963)

Gill & Davy (1969)

の22では中立曲線が2つに分かれることを示した。  
(図6、図7)。 Gill & Davy は図6の曲線について、上の部分を *mechanically-driven-instability*、下の部分を *buoyancy-driven-instability* と名づけ、それぞれの場合について攪乱のエネルギーがどのような機構で供給されているかを調べた。 *mechanically-driven-instability* の場合には攪乱は1次対流の速度場からエネルギーの供給を受け成長し、 *buoyancy-driven-instability* の場合には温度場からエネルギーの供給を受け成長することを示した。

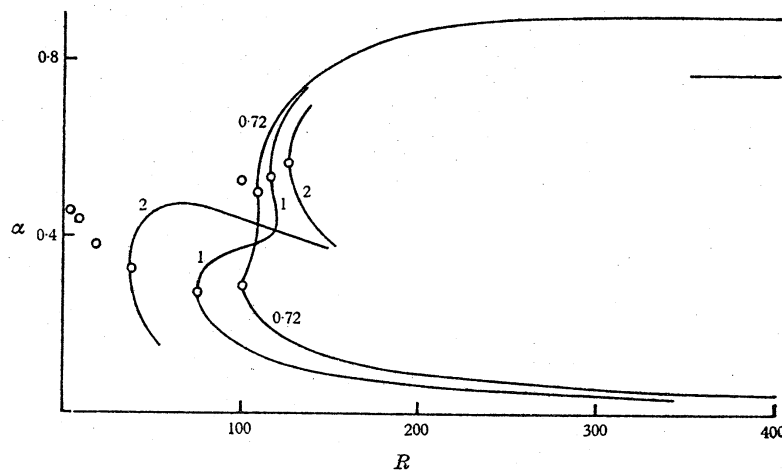


FIGURE 2. Neutral stability curves for Prandtl numbers  $\sigma = 0.72, 1$  and  $2$ . The circles indicate critical values including those for  $\sigma = 0.4, 4, 10$  and  $20$ . The line segment shows the large  $R$  asymptote deduced from the Rayleigh equation.

図 6

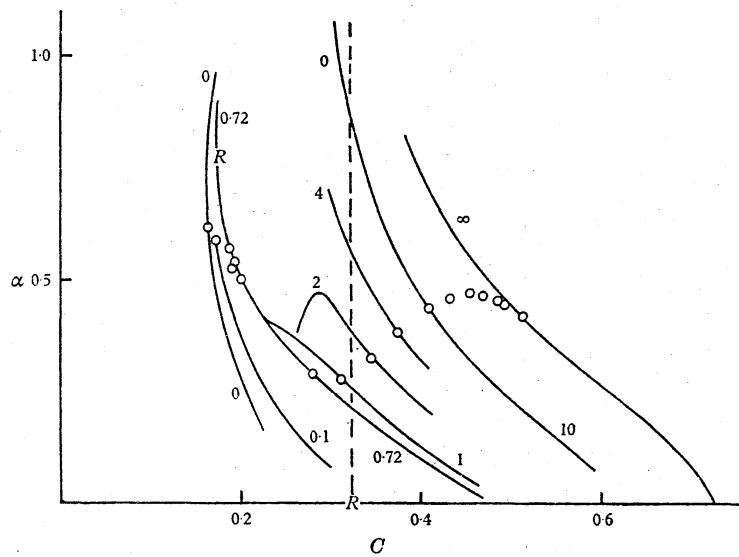


FIGURE 5. The wave speed  $c$  of neutral disturbances as a function of wave-number  $\alpha$  and Prandtl number. The small circles indicate the critical values listed in table 1. The two points  $R$  correspond to solutions of the Rayleigh equation, and the broken line corresponds to  $c = W_{\max}$ .

図 7

#### § 4. 今回得られた結果

Ortho-Normal 法 (Appendix 参照) で直接積分。

その結果は

$$m = 2.8 \quad G_c = 3176.$$

$$m = 3.0 \quad G_c = 2355.$$

$$m = 3.5 \quad G_c = 2607.$$

$$m = 4.0 \quad G_c = 3360.$$

特に  $m = 3.0$  の場合についてくわしく説明する。

$$m = 3.0 \quad G_c = 2355. \quad C_c = 0.01850 \quad (W_{\max} = 0.01821)$$

$\alpha_c = 1.08$  中立曲線は図 8 のようになる。

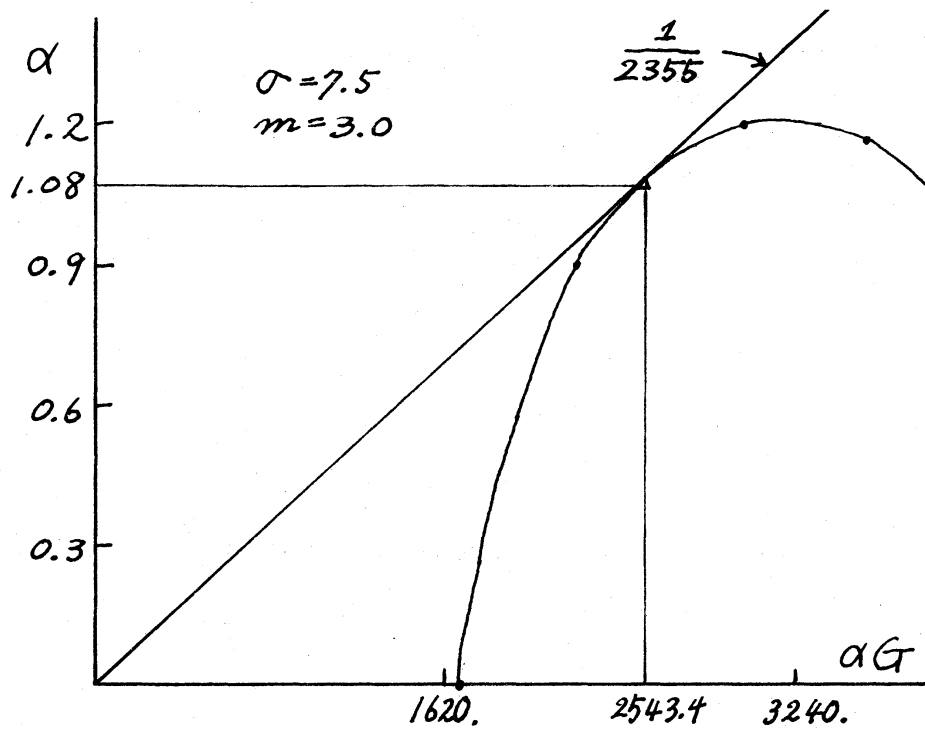
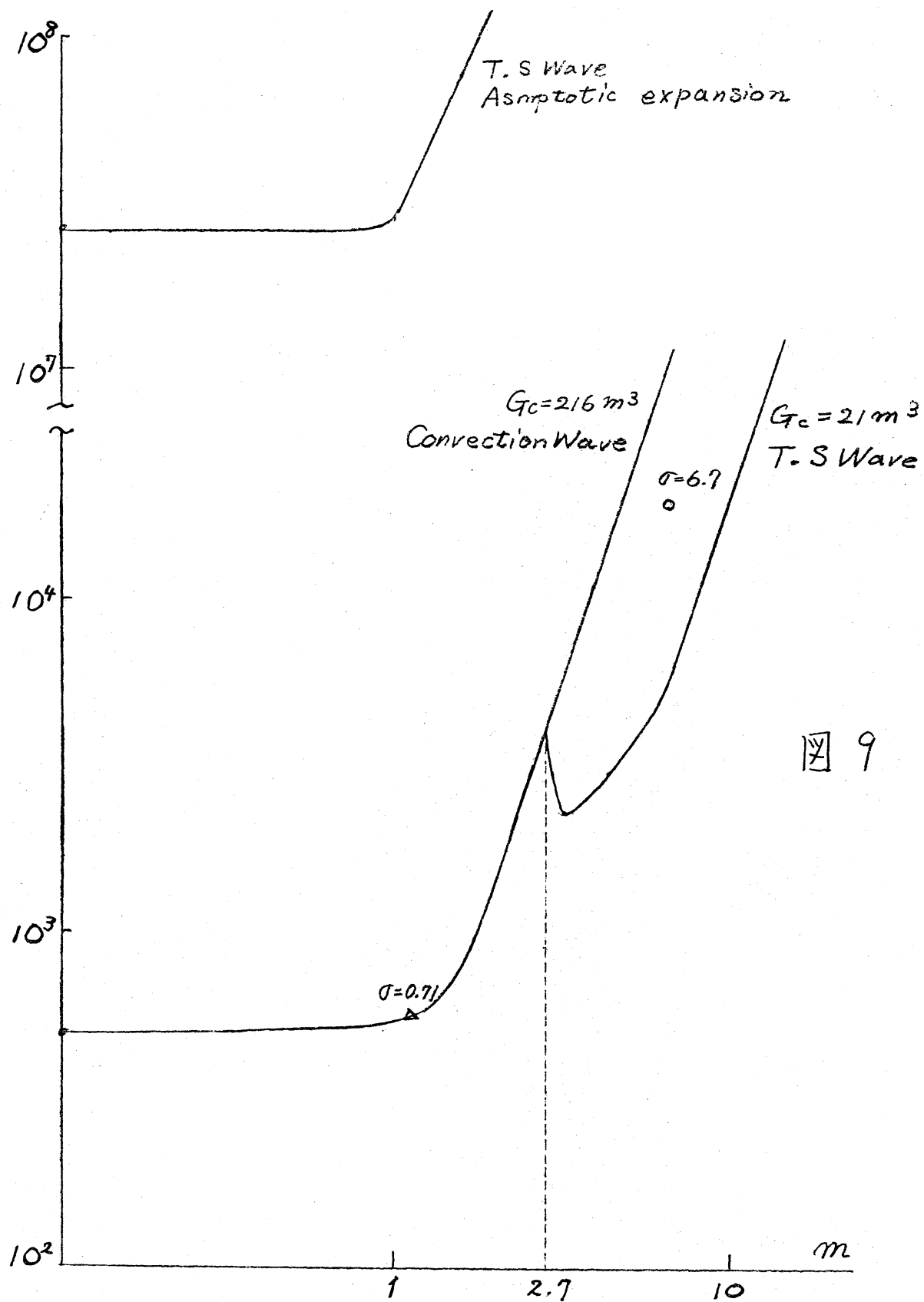


図 8

以上の結果をまとめると図9のようになる。 $Cr$ の値から、これまでに得られていた結果は *mechanically-driven-instability* であり、今回得られた結果は *buoyancy-driven-instability* であることがわかる。図9から、実際に物理的に重要なのは同じ  $m$  の値に対し小さな  $G_c$  を与える *buoyancy-driven-instability* である。三重臭は  $m=3.7$  である。

## § 5. Discussion

Gill & Kirkham は  $\sigma \rightarrow \infty$  について伝播波攪乱に対する安定性を調べている。 $\sigma \rightarrow \infty$  における対流型攪乱に対する安



定性を調べれば図9と同様のグラフができるかもしれない。  
 $h=7.5$ に対する上の結果を実験あるいは数値実験によるシミュレーションで確かめることは興味あることである。ただしその場合、平板間隔  $2L$  と流体層の深さ  $H$  の比  $h=H/2L$  (この比はしばしば "Aspect Ratio" と呼ばれる) が  $70.6$  よりも大きくなければ、対流型不安定と伝播波型不安定の両方を実現することができない。

### Appendix. Ortho-normal Method

独立な3つの初期条件から出発する解を  $(\phi_1, \theta_1)$ ,  $(\phi_2, \theta_2)$ ,  $(\phi_3, \theta_3)$  とする。次の3つのベクトルを定義する。

$$a = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ D\phi_1 \\ D^2\phi_1 \\ D^3\phi_1 \\ \theta_1 \\ D\theta_1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \phi_2 \\ D\phi_2 \\ D^2\phi_2 \\ D^3\phi_2 \\ \theta_2 \\ D\theta_2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} \phi_3 \\ D\phi_3 \\ D^2\phi_3 \\ D^3\phi_3 \\ \theta_3 \\ D\theta_3 \end{pmatrix}$$

数ステップで Runge-Kutta-Gill 法で積分した後、 $a, b, c$  を直交化する。つまり  $a$  に対して  $b$  を

$$b \leftarrow b - \frac{(a \cdot b)}{|a|^2} a$$

でおきかえ、同様に  $c$  を  $a, b$  に直交化する。再び数ステップで積分し、 $a, b, c$  を直交化する操作をくり返す。この方法

によつて積分の任意の段階で互いに一次独立な解を十分な精度で求めることができる。

### References

- J. E. Elder : J. F. M. 23 (1965) 77  
 C. M. Vest and V. S. Arpacı : J. F. M. 36 (1969) 1  
 Y. Oshima : J. Phys. Soc. Japan 30 (1971) 872  
 R. N. Rudakov : Prikl. Mat. Mekh. 31 (1967) 349  
 K. Gotoh and N. Ikeda : J. Phys. Soc. Japan 33 (1972) 1697  
 K. Gotoh and J. Mizushima : J. Phys. Soc. Japan 34 (1973) 1408  
 K. Gotoh and M. Satoh : J. Phys. Soc. Japan 21 (1966) 542  
 J. Mizushima : Unpublished  
 A. E. Gill and A. Davy : J. F. M. 35 (1969) 775  
 P. R. Nachtsheim : NASA TN D-2089 (1963)  
 A. E. Gill and C. C. Kirkham : J. F. M. 42 (1970) 125